

Schriftliche Prüfungsarbeit zum mittleren Schulabschluss 2008 im Fach Mathematik

23.06.2008

Arbeitsbeginn: 11 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel:

- beiliegende Formelübersicht (eine Doppelseite)
- Wissenschaftlicher Standard-Taschenrechner
(nichtgrafikfähig, nichtprogrammierbar, nicht symbolisch rechnend)

Bearbeiten Sie bitte die Aufgaben 1d, 2 und 7a auf dem Aufgabenblatt.
Alle anderen Aufgaben bearbeiten Sie bitte auf gesondertem Papier.

Denken Sie an Begründungen und vergessen Sie bei Textaufgaben nicht den Antwortsatz, denn jede Frage erfordert eine Antwort.
Alle Lösungswege müssen nachvollziehbar dokumentiert sein.
Falls Sie eine Lösung durch Probieren finden, müssen Sie Ihre Überlegungen unbedingt ausreichend kommentieren.
Es sind maximal 65 Punkte zu erreichen.

Name, Vorname: Klasse:

1. Berechnungen (9 Punkte)

- a) Berechnen Sie $0,7 + \frac{1}{2} : 0,25 - 0,06 : 0,3$
- b) Berechnen Sie $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{8}$.
- c) Subtrahieren Sie vom Produkt der Zahlen $\frac{5}{6}$ und $\frac{1}{3}$ die Differenz der beiden Zahlen.
Schreiben Sie den Term auf und rechnen Sie mit Brüchen.
- d) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Kreuzen Sie an.

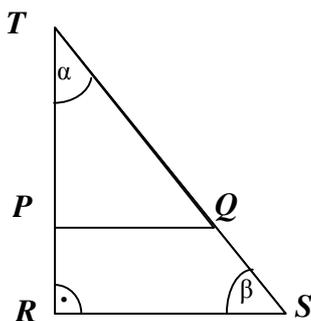
		richtig	falsch
1)	$8^0 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2)	Die Quersumme von 124 ist 25.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3)	1 % von 1 dm ² ist 1 cm ²	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- e) Geben Sie zwei verschiedene Möglichkeiten an, die Zahl 81 als Potenz zu schreiben.

2. Dreieck (5 Punkte)

Für die Abbildung gilt: $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$.

Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und kreuzen Sie an.



	wahr	falsch
a) $\sin \alpha = \frac{ \overline{PQ} }{ \overline{TQ} }$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) $\sin \alpha = \frac{ \overline{RS} }{ \overline{TS} }$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) $\tan \beta = \frac{ \overline{TR} }{ \overline{TS} }$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) $\cos \beta = \frac{ \overline{RS} }{ \overline{TS} }$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) $\cos \beta = \frac{ \overline{PQ} }{ \overline{TQ} }$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3. Karten ziehen (3 Punkte)

Für die Bildung von Arbeitsgruppen benutzt der Lehrer ein Kartenspiel mit 32 Karten. Vier Karten sind Könige. Die Schülerinnen und Schüler ziehen verdeckt je eine Karte. Michael zieht als erster. Er hat einen König. Janine zieht als zweite. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie auch einen König zieht? Notieren Sie Ihren Lösungsweg. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent an.

4. Altersangaben (6 Punkte)

Sven ist 6 Jahre älter als seine Schwester Claudia.

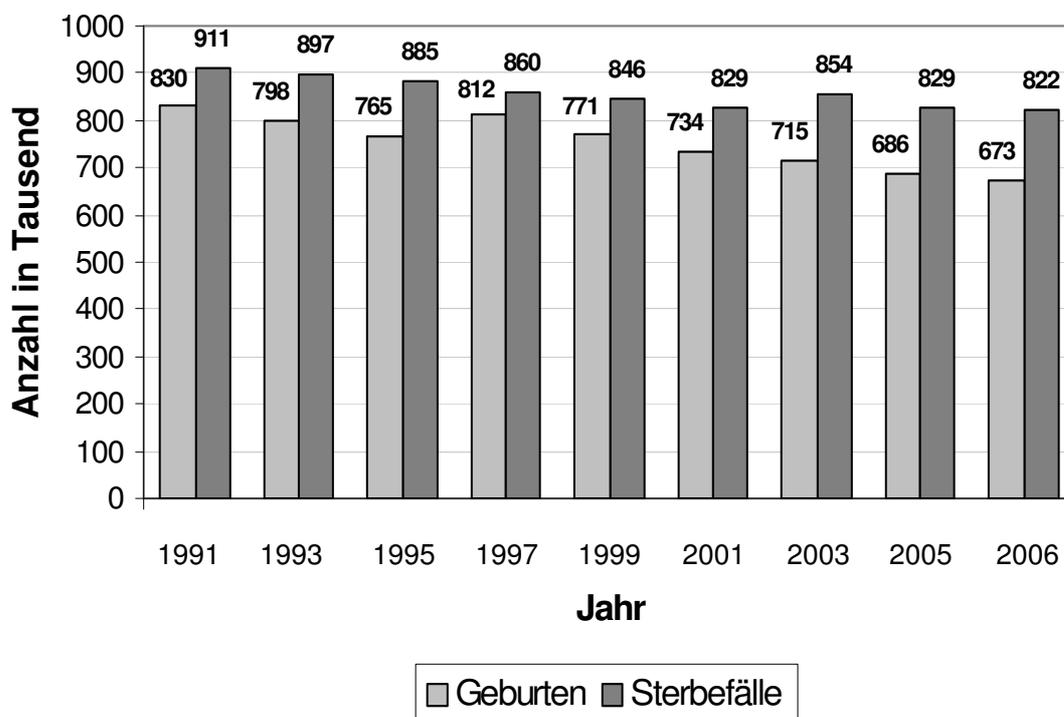
Das Produkt beider Altersangaben ergibt 187.

Stellen Sie eine Gleichung auf und berechnen Sie, wie alt beide Geschwister sind.

5. Bevölkerung (7 Punkte)

Bevölkerungsentwicklung in Deutschland

Die Zahl der Einwohner in Deutschland geht weiter zurück. Ende 2006 lebten in der Bundesrepublik 82,315 Millionen Menschen (ca. 0,1 % weniger als ein Jahr zuvor). Entgegen dem Trend wuchs die Einwohnerzahl in Berlin 2006 um 0,3 % auf 3.404.037 Einwohner.



- Wie hoch war das Bevölkerungsdefizit (Differenz zwischen Geburten und Sterbefällen) 2006 in Deutschland?
- Berechnen Sie, um wie viele Einwohner sich die Bevölkerungszahl Berlins im Jahr 2006 erhöht hat.
- Prüfen Sie durch eine Rechnung, ob die folgende Aussage richtig ist:
2006 wurden in Deutschland fast ein Fünftel weniger Kinder geboren als 1991.

6. Bleistift (8 Punkte)

Ein neuer, noch ungespitzter Bleistift aus Holz hat die Form eines Zylinders. Er ist 19 cm lang und hat einen Durchmesser von 0,8 cm. Das zylinderförmige Loch für die Mine in der Mitte des Stiftes hat einen Durchmesser von 0,2 cm.

- Berechnen Sie, wie viel cm^3 Holz ein solcher Bleistift enthält. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.
- Am Ende der Herstellung wird das erste Anspitzen maschinell vorgenommen. Vier Maschinen spitzen jeweils pro Minute 250 Stifte an. Wie viele Stifte könnten täglich angespitzt werden, wenn die Maschinen ohne Unterbrechung Tag und Nacht laufen?
- Jeweils sechs Bleistifte sollen in quaderförmige Verpackungen passen. Geben Sie die Innenmaße für zwei mögliche Verpackungen an (Länge, Breite, Höhe). Skizzieren Sie das Schrägbild oder eine andere perspektivische Darstellung einer der Verpackungen.

7. Stromtarife (12 Punkte)

Familie H. möchte den Stromanbieter wechseln. Sie vergleicht dazu zwei Angebote. Beide Tarife bestehen aus einer monatlichen Grundgebühr und einem Teil, der sich nach den verbrauchten Kilowattstunden (kWh) richtet.

	Grundgebühr (pro Monat)	Verbrauchspreis pro kWh
Anbieter „Billig-Strom“	4,90 €	19 Cent
Anbieter „Watt für wenig“	8,20 €	16 Cent

- Berechnen Sie die beiden fehlenden Werte in der folgenden Tabelle und tragen Sie sie ein.

monatlicher Verbrauch in kWh	20	50	100	150
monatliche Gesamtkosten bei „Billig-Strom“	8,70 €		23,90 €	33,40 €
monatliche Gesamtkosten bei „Watt für wenig“	11,40 €	16,20 €	24,20 €	

- Stellen Sie die Kosten, die entstehen, für beide Anbieter jeweils durch einen Graphen dar. Zeichnen Sie beide Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- Katrin benötigt in ihrer Ein-Zimmer-Wohnung monatlich ungefähr 120 kWh. Welcher Anbieter ist für sie günstiger?
- Geben Sie die Funktionsgleichung für einen der beiden Graphen an.
- Beschreiben Sie, wie Sie den Schnittpunkt der beiden Graphen rechnerisch ermitteln könnten.

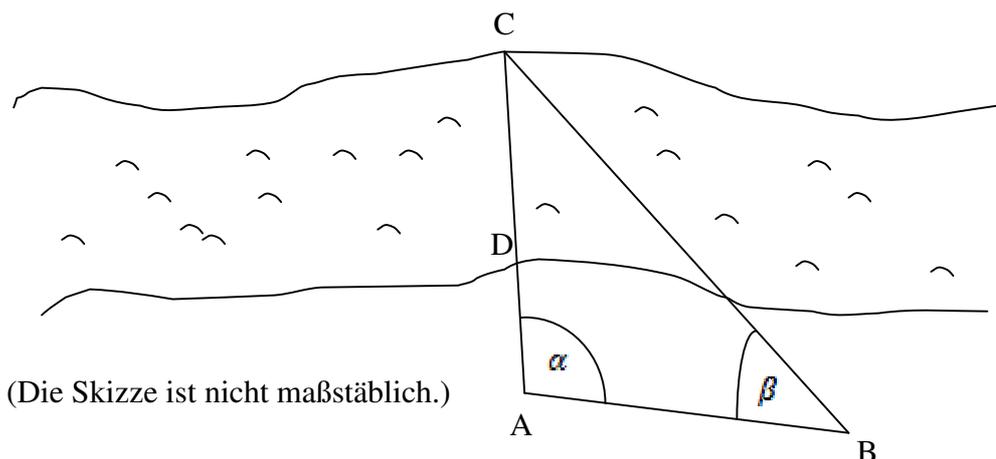
8. Zeitungsmeldung (3 Punkte)

Aus der Zeitschrift „Naturarzt“ unter der Überschrift „Schlaganfall: Frauen genesen schlechter“: „Dies schafft ein Vierteljahr nach der Entlassung aus dem Krankenhaus offenbar nur jede zweite Betroffene. Bei Männern sind es dagegen fast 50 Prozent.“

Quelle: Spiegel; 44/2007

Der Mathematiklehrer sagt: „Der Text enthält einen Widerspruch!“
Erläutern Sie den Widerspruch. Machen Sie einen Vorschlag, wie man Überschrift und Text korrekt formulieren könnte.

9. Brücke (12 Punkte)



Vom Punkt C zum Punkt D wird der Bau einer neuen Brücke geplant.
Durch Messung im Gelände wurden ermittelt:

$$|\overline{AB}| = 65 \text{ m}; \quad |\overline{AD}| = 15 \text{ m}; \quad \alpha = 110^\circ; \quad \beta = 30^\circ$$

- Konstruieren Sie das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab. Geben Sie den Maßstab an. Tragen Sie den Punkt D ein und ermitteln Sie die Brückenlänge durch Messen der Strecke \overline{CD} .
- Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle BCA$? Begründen Sie.
(Eine Messung ist hier keine Begründung.)
- Überprüfen Sie die Länge der Strecke \overline{AC} in ihrer Konstruktion durch Berechnung.

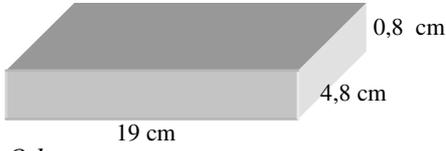
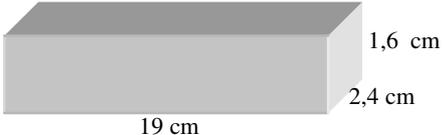
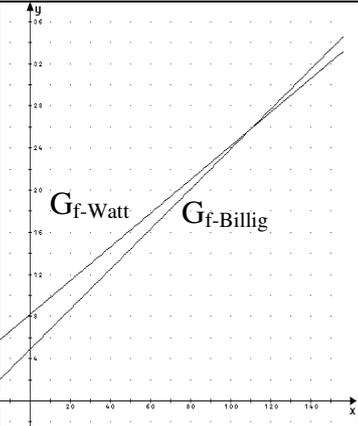
Alternative, korrekte Lösungen und Lösungswege sind oft möglich und immer vergleichbar zu be-punkten, selbst wenn im Erwartungshorizont kein Hinweis darauf erfolgt. Halbe Punkte (Bewertungs-einheiten, BE) sind nicht vorgesehen. Fehlerfortsetzung ist zu be-punkten.

Die Angabe von Einheiten muss (spätestens) im Antwortsatz korrekt erfolgen, während der Rechnung sollten Sie so wie in Ihrem Vorunterricht bewerten. Fehler in der mathematischen Symbolsprache, z. B. der falsche Gebrauch des Gleichheitszeichens oder falsch gesetzte bzw. fehlende Klammern sind bei der Bewertung mit zu berücksichtigen.

Die Formulierung der Antwortsätze ist ggf. nur als Beispiel zu verstehen. Ein Antwortsatz mit falsch berechneten Werten wird nur dann gewertet, wenn die Ergebnisse nicht völlig abwegig sind. Wird ein falsches Ergebnis allerdings erkannt und entsprechend kommentiert, so wird dies positiv gewertet.

Auf-gabe	Lösungen	BE	Standard-bezug	
1a	$2,5$ oder $\frac{5}{2}$	1	L1 K5 AB I	
1b	$\frac{1}{4}$ oder 0,25	1		
1c	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)$ $= -\frac{2}{9}$	1		
	Oder $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) = \frac{7}{9}$ <i>Bem.: Gerundete Dezimalbrüche sind nicht korrekt.</i>	1		
1d		richtig	falsch	
	1) $8^0 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	1
	2) Die Quersumme von 124 ist 25.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	1
	3) 1 % von 1 dm ² ist 1 cm ²	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1
1e	9^2 3^4	1		
	Oder 81^1 oder $6561^{\frac{1}{2}}$	1		
2		wahr	falsch	
		<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1
		<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1
		<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	1
		<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1
		<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1
3	Janine zieht aus 31 Karten mit noch 3 Königen.	1	L5 K3 AB II	
	Die Wahrscheinlichkeit, dass sie auch einen König zieht, beträgt also $\frac{3}{31}$,	1		
	das sind ca. 9,7 %. Oder ca. 10 %.	1		
Zwischensumme		17		

	Übertrag	17	
4	<p>x: Claudias Alter; Svens Alter: $x + 6$</p> $x(x + 6) = 187$ $x^2 + 6x - 187 = 0$ $x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9+187}$ $x_1 = 11; x_2 = -17$ <p>x_2 als negative Zahl entfällt. Claudia ist 11 Jahre, ihr Bruder Sven 17 Jahre alt. <i>Oder</i> x: Svens Alter; $(x - 6)$: Claudias Alter, mit entsprechend geänderter Gleichung und Rechnung. <i>Bem.: Wenn der Kommentar zu x_2 fehlt, kann die BE trotzdem gegeben werden. Die quadratische Gleichung kann auch mit Hilfe der quadratischen Ergänzung gelöst werden. Für das Ermitteln der Lösung durch systematisches, dokumentiertes Probieren werden maximal 4 BE gegeben.</i></p>	1 1 1 1 1 1	L4 K3 AB II
5a	$822000 - 673000 = 149000$	1	L5, K4 AB I
5b	$\frac{3404037}{100,3\%} = \frac{x}{0,3\%}$ $x \approx 10182$ <p>Im Jahr 2006 erhöhte sich die Bevölkerungszahl Berlins um 10182. <i>Oder</i> 100,3 % entspricht 3404037 Einwohnern 1 % entspricht $\frac{3404037}{100,3}$ Einwohnern 0,3 % entspricht $\frac{3404037 \cdot 0,3}{100,3} \approx 10182$ Einwohnern</p>	1 1 1	L5 K5 AB II
5c	$\frac{830000}{100\%} = \frac{673000}{x}$ $x \approx 81\%$ <p>Der Geburtenrückgang betrug ca.19 %, das ist fast ein Fünftel. <i>Oder</i> Der Geburtenrückgang betrug ca.19 %, das ist weniger als ein Fünftel. <i>Oder</i> $830000 - 673000 = 157000$; $830000 : 5 = 166000$. Die Aussage ist richtig, denn ein Fünftel von 830000 ist 166000; 157000 ist fast so groß. <i>Oder</i> Die Aussage ist falsch, denn ein Fünftel von 830000 ist 166000 und damit größer als 157000. <i>Bem.: Es sind wegen der Formulierung „... fast ein Fünftel...“ beide Interpretationen des Ergebnisses zugelassen („Die Aussage ist richtig“ bzw. „Die Aussage ist falsch.“).</i></p>	1 1 1	L5 K5 AB II
	Zwischensumme	30	

	Übertrag	30	
6a	$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $V_{\text{Holz}} = V_{\text{gesamt}} - V_{\text{Mine}} ; V_{\text{Holz}} = \pi \cdot h \cdot r^2 - \pi \cdot h \cdot r_{\text{Mine}}^2$ $V_{\text{Holz}} = \pi h (r^2 - r_{\text{Mine}}^2)$ $V_{\text{Holz}} \approx 8,95 \text{ cm}^3$ <p>Ein (unangespitzter) Bleistift enthält ca. 8,95 cm³ Holz.</p> <p>Oder</p> $V_{\text{gesamt}} = \pi \cdot 0,4^2 \cdot 19 \approx 9,55$ $V_{\text{Mine}} = \pi \cdot 0,1^2 \cdot 19 \approx 0,60, V_{\text{Holz}} = 9,55 - 0,60 = 8,95$	1 1 1	L2 K5 AB II
6b	$4 \cdot 250 \cdot 60 \cdot 24 = 1440000$ <p>Es können täglich 1440000 Stifte angespitzt werden.</p>	1	L2, K2 AB I
6c	<p>1. Möglichkeit Länge: 19 cm; Breite: 4,8 cm; Höhe: 0,8 cm</p> <p>2. Möglichkeit Länge: 19 cm; Breite: 2,4 cm; Höhe: 1,6 cm</p>  <p>0,8 cm 4,8 cm 19 cm</p> <p>- räumliche Skizze - annähernd maßstabsgerecht</p> <p>Oder</p>  <p>1,6 cm 2,4 cm 19 cm</p> <p>Bem.: Es kann auch eine andere räumliche Darstellung gewählt werden. Die Darstellung muss erkennbar sein, es muss nicht exakt konstruiert werden.</p>	1 1 1 1	L3 K2 AB II
7a	<p>Fehlender Eintrag bei „Billig-Strom“: 14,40 €</p> <p>Fehlender Eintrag bei „Watt für wenig“: 32,20 €</p>	1 1	L4, K5 AB I
7b	 <p>Koordinatensystem:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Sinnvolle Achseneinteilung - Sinnvolle Beschriftung <p>Zwei Graphen mit geeigneter Kennzeichnung</p>	1 1 2	L4 K4 AB II
7c	Der Tarif bei „Watt für wenig“ ist günstiger.	1	L4, K2 AB I
7d	$f_{\text{Billig}}(x) = 0,19x + 4,9$ <p>dabei $m = 0,19$ korrekt, $n = 4,9$ korrekt.</p> <p>Oder</p> $f_{\text{Watt}}(x) = 0,16x + 8,2 ; n = 0,16 \text{ korrekt; } n = 8,2 \text{ korrekt}$	1 1	L4 K4 AB II
	Übertrag	47	

	Zwischensumme	47	
7e	Man setzt die beiden Funktionsterme gleich, löst die entstehende Gleichung nach x auf und ermittelt die zweite Koordinate y durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen. <i>Bem.: Es gibt Formulierungsalternativen. Formulierungen können durch Rechnungen ergänzt werden, dürfen aber nicht vollständig wegfallen.</i>	1 1 1	L4 K1 AB III
8	Erläuterung: „Jede zweite“ entspricht $\frac{1}{2} = 50\%$, das ist aber mehr als „fast 50 %“, also genesen die Frauen nicht schlechter, sondern besser. Korrektur der Überschrift: „Schlaganfall: Frauen genesen etwas besser“ Korrektur des Textes: „... Krankenhaus jede zweite Betroffene. Bei Männern sind es nur fast 50%.“ Oder Korrektur der Überschrift: „Schlaganfall: Frauen und Männer mit fast gleichen Heilungschancen“ Korrektur des Textes: „... offenbar jede ... Bei Männern sind es ebenfalls fast 50 %.“	1 1 1	L1 K6 AB I
9a	Maßstab 1:1000 o. a. Oder 1 m in der Realität entspricht 0,1 cm in der Zeichnung o. a. Konstruktion <i>Bem.: Alle Streckenlängen, auch die der Strecke \overline{CD}, dürfen maximal 2 mm von der korrekten Länge in dem gewählten Maßstab abweichen. Die Winkelgrößen dürfen maximal um 2° von der gegebenen Winkel- größe abweichen.</i> Beschriftung entsprechend der Skizze in der Aufgabe Korrektes Eintragen von D. Messung: $ \overline{CD} = 3,5$ cm (bzw. entsprechend bei einem anderen Maßstab) Die Brückenlänge beträgt ca. 35 m. <i>Bem.: Wenn das Messergebnis nicht genannt wird und nur der Antwortsatz formuliert ist, kann die BE für die Messung trotzdem gegeben werden.</i>	1 2 1 1 1 1	L3 K2 AB I
9b	α BCA (= γ) = 40° Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt 180°. (α = 110°, β = 30°) Oder α + β + γ = 180°	1 1	L3 K5 AB I
9c	gemessen: $ \overline{AC} = 5,1$ cm (bei Verwendung des Maßstabes 1:1000) $\frac{ \overline{AC} }{\sin \beta} = \frac{ \overline{AB} }{\sin \gamma}$ $ \overline{AC} = \frac{6,5 \text{ cm} \cdot \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 5,1$ cm <i>Bem.: Wenn bei der Konstruktion oder bei der Messung ein Fehler gemacht wurde oder der Winkel γ falsch berechnet wurde, gilt das Prinzip der Fehler- fortsetzung und die BE kann trotzdem gegeben werden.</i>	1 1 1	L3 K5 AB II
	Summe	65	

Bewertungstabelle

Note	1	2	3	4	5	6
%	≥ 95 %	≥ 80 %	≥ 65 %	≥ 50 %	≥ 15 %	darunter
Anzahl BE	65 – 62	61 – 52	51 – 42	41 – 33	32 – 10	9 – 0